

**Marcelina Mocanu**

**ANALIZĂ REALĂ**

**Editura ALMA MATER**

**Universitatea „Vasile Alecsandri” din Bacău**

**2013**

## Cuprins

<b>I</b>	<b>Clase remarcabile de funcții reale</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Funcții reale monotone pe un interval</b>	<b>3</b>
1.1	<b>Definiții și proprietăți</b> . . . . .	3
1.1.1	Studiul monotoniei funcțiilor derivabile . . . . .	4
1.1.2	Operații cu funcții monotone . . . . .	4
1.2	<b>Legătura clasei funcțiilor monotone cu alte clase de funcții</b> .	5
1.3	<b>Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone</b>	7
1.3.1	Marginile unei mulțimi de numere reale . . . . .	8
1.3.2	Proprietățile mulțimii punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Funcții cu proprietatea lui Darboux</b>	<b>13</b>
2.1	<b>Noțiuni introductive</b> . . . . .	13
2.1.1	Definiții echivalente . . . . .	13
2.1.2	Operații cu funcții care au proprietatea lui Darboux . . . . .	16
2.1.3	Anularea unei funcții cu proprietatea lui Darboux . . . . .	17
2.2	<b>Legătura clasei funcțiilor cu proprietatea lui Darboux cu alte clase de funcții</b> . . . . .	17
2.2.1	Continuitate și proprietatea lui Darboux . . . . .	17
2.2.2	Derivabilitate și proprietatea lui Darboux . . . . .	19
2.2.3	Funcții care nu au proprietatea lui Darboux . . . . .	20
2.3	<b>Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții cu proprietatea lui Darboux</b> . . . . .	23
2.4	<b>Consecințe ale proprietății lui Darboux</b> . . . . .	24
2.4.1	Conexiuni între proprietățile de monotonie, injectivitate, continuitate și proprietatea lui Darboux . . . . .	24
2.4.2	Inversarea funcțiilor continue . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Funcții continue pe mulțimi compacte</b>	<b>27</b>
3.1	<b>Proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi compacte</b> . . .	27
3.1.1	Funcții continue . . . . .	27
3.1.2	Mulțimi compacte în spații topologice . . . . .	28
3.1.3	Spațiul normat $(C(K), \ \cdot\ )$ . . . . .	30
3.1.4	Funcții uniform continue între spații metrice . . . . .	33
3.2	<b>Aproximarea uniformă a funcțiilor continue</b> . . . . .	36

3.2.1	Aproximarea uniformă prin polinoame a funcțiilor continue pe intervale compacte . . . . .	36
3.2.2	Polinoame Bernstein . . . . .	37
3.2.3	Aproximarea uniformă a funcțiilor continue periodice prin polinoame trigonometrice . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Funcții cu variație mărginită</b>	<b>45</b>
4.1	<b>Motivație</b> . . . . .	45
4.1.1	Legătura cu funcțiile monotone . . . . .	45
4.1.2	Caracterizarea drumurilor rectificabile . . . . .	45
4.2	<b>Definiții</b> . . . . .	46
4.3	<b>Legătura clasei funcțiilor cu variație mărginită cu alte clase de funcții</b> . . . . .	47
4.3.1	Condiție necesară pentru ca o funcție să fie cu variație mărginită	47
4.3.2	Condiții suficiente pentru ca o funcție să fie cu variație mărginită	47
4.4	<b>Proprietăți ale variației totale</b> . . . . .	49
4.4.1	Comportarea față de operațiile algebrice . . . . .	49
4.4.2	Aditivitatea variației totale ca funcție de interval . . . . .	50
4.4.3	Invarianța proprietății de variație mărginită la schimbarea într-un număr finit de puncte . . . . .	51
4.5	<b>Calculul variației totale</b> . . . . .	53
4.5.1	Cazul funcțiilor monotone pe porțiuni . . . . .	53
4.5.2	Cazul funcțiilor de clasă $C^1$ . . . . .	53
4.5.3	Cazul funcțiilor în scară . . . . .	54
4.6	<b>Teorema lui Jordan (de structură a spațiului funcțiilor cu variație mărginită)</b> . . . . .	56
4.7	<b>Șiruri de funcții cu variație mărginită</b> . . . . .	57
4.8	<b>Integrala Riemann-Stieltjes</b> . . . . .	60
4.8.1	Introducere . . . . .	60
4.8.2	Definire și condiții de existență . . . . .	61
4.8.3	Reducerea calculului unei integrale Stieltjes la calculul unei integrale Riemann . . . . .	66
4.8.4	Proprietăți ale integralei Stieltjes . . . . .	67
4.8.5	Trecerea la limită sub semnul integralei Stieltjes . . . . .	69
4.8.6	Teorema lui Riesz . . . . .	72
<b>II</b>	<b>Introducere în teoria măsurii și integralei</b>	<b>77</b>
<b>5</b>	<b>Elemente de teoria măsurii</b>	<b>79</b>
5.1	<b>Introducere</b> . . . . .	79
5.2	<b>Evoluția noțiunii de măsură</b> . . . . .	81
5.2.1	Noțiunea de arie în geometria elementară . . . . .	81
5.2.2	Măsura Jordan . . . . .	82
5.2.3	Măsura Lebesgue . . . . .	88
5.3	<b>Clase de mulțimi utilizate în teoria măsurii</b> . . . . .	93

5.3.1	Noțiuni introductive . . . . .	93
5.3.2	Proprietăți ale inelelor de părți. Exemple de inele de părți . .	94
5.3.3	Limite extreme ale șirurilor de mulțimi. Proprietăți referitoare la șiruri de mulțimi ale $\sigma$ -inelelor . . . . .	97
5.3.4	Lema reuniunii disjuncte . . . . .	101
5.3.5	Mulțimi boreliene . . . . .	102
5.4	<b>Noțiunea de măsură</b> . . . . .	105
5.4.1	Definiție. Proprietăți elementare . . . . .	105
5.4.2	Proprietatea de subaditivitate numărabilă a măsurii . . . . .	110
5.4.3	Proprietăți de continuitate ale măsurii . . . . .	111
5.5	<b>Măsură exterioară</b> . . . . .	114
5.5.1	Definiție. Exemple . . . . .	114
5.5.2	Prelungirea unei măsurii la o măsură exterioară . . . . .	116
5.5.3	. . . . .	118
5.5.4	Mulțimi măsurabile relativ la o măsură exterioară . . . . .	118
5.5.5	Prelungirea măsurilor . . . . .	123
5.6	<b>Măsura Lebesgue pe dreapta reală</b> . . . . .	125
5.6.1	Construcția măsurii Lebesgue pe dreapta reală . . . . .	125
5.6.2	Proprietăți ale măsurii Lebesgue pe dreapta reală . . . . .	130
5.6.3	Proprietăți de invarianță la translații ale măsurii Lebesgue și măsurii exterioare Lebesgue . . . . .	133
5.6.4	Proprietăți de regularitate ale măsurii Lebesgue . . . . .	135
5.7	<b>Exemple clasice din teoria măsurii Lebesgue</b> . . . . .	138
5.7.1	Mulțimea lui Cantor . . . . .	138
5.7.2	Exemplul lui Vitali de mulțime nemăsurabilă Lebesgue . . . .	139
<b>6</b>	<b>Funcții măsurabile</b>	<b>141</b>
6.1	<b>Definiții</b> . . . . .	141
6.2	<b>Exemple de funcții măsurabile</b> . . . . .	143
6.2.1	Măsurabilitatea funcțiilor continue . . . . .	143
6.2.2	Funcții $\mathcal{A}$ -etajate . . . . .	143
6.3	<b>Teoreme de caracterizare pentru funcții măsurabile</b> . . . . .	147
6.4	<b>Operații cu funcții măsurabile</b> . . . . .	149
6.4.1	Partea pozitivă și partea negativă a unei funcții . . . . .	152
6.5	<b>Funcții egale aproape peste tot</b> . . . . .	153
6.6	<b>Aproximarea funcțiilor măsurabile prin funcții etajate</b> . . . .	155
6.7	<b>Tipuri speciale de convergență a șirurilor de funcții măsurabile</b>	<b>158</b>
6.7.1	Convergența aproape peste tot/ aproape uniformă/ în măsură. Definiții, proprietăți . . . . .	158
6.7.2	Legături cu tipurile obișnuite de convergență . . . . .	161
6.7.3	Legătura între tipurile speciale de convergență . . . . .	162

<b>7</b>	<b>Integrala abstractă Lebesgue</b>	<b>165</b>
7.1	Integrarea funcțiilor etajate pozitive . . . . .	165
7.2	Integrarea funcțiilor măsurabile pozitive . . . . .	168
7.2.1	Proprietăți ale operatorului de integrare pe clasa funcțiilor măsurabile pozitive . . . . .	170
7.3	Teorema convergenței monotone și aplicații . . . . .	173
7.3.1	Teorema convergenței monotone . . . . .	173
7.3.2	Consecințe ale teoremei convergenței monotone . . . . .	174
7.4	Integrarea funcțiilor măsurabile . . . . .	179
7.4.1	Definiții . . . . .	179
7.4.2	Proprietăți fundamentale ale integralei generale Lebesgue . . . . .	180
7.4.3	Trecerea la limită sub semnul integralei Lebesgue. Teorema convergenței dominate . . . . .	186
7.4.4	Consecință a teoremei convergenței dominate privind integrarea termen cu termen a unor serii de funcții integrabile Lebesgue . . . . .	188
7.4.5	Continuitatea absolută a integralei Lebesgue . . . . .	188
7.4.6	Schimbare de variabilă în integrala generală Lebesgue . . . . .	190
7.5	Comparație între integralele Riemann și Lebesgue pe intervale ale dreapta reale . . . . .	192
7.5.1	Integrala Lebesgue-generalizare a integralei Riemann . . . . .	193
7.5.2	Legătura între integrala Riemann și integrala Lebesgue a unei funcții pe $(-\infty, \infty)$ . . . . .	196
7.6	Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann . . . . .	201
7.6.1	Criteriul lui Lebesgue. Enunț și demonstrație . . . . .	202
7.6.2	Consecințe ale criteriului Lebesgue de integrabilitate Riemann . . . . .	205
<b>8</b>	<b>Spațiile <math>L^p</math></b>	<b>209</b>
8.1	Definiții . . . . .	209
8.2	Inegalitățile Young, Hölder, Minkowski . . . . .	211
8.3	Spațiul normat $L^p(X)$ . . . . .	215
8.3.1	Norma spațiului $L^p(X)$ . . . . .	215
8.3.2	Completitudinea spațiului $L^p(X)$ . . . . .	216
8.3.3	Proprietăți de densitate ale spațiului $L^p(X)$ . . . . .	219
8.4	Spațiul $L^\infty(X)$ . . . . .	220
<b>9</b>	<b>Măsura și integrala pe spații produs</b>	<b>223</b>
9.1	Măsura pe un spațiu produs . . . . .	223
9.1.1	$\sigma$ -algebra produs. Secțiuni ale unei mulțimi . . . . .	223
9.1.2	Secțiuni ale funcțiilor măsurabile . . . . .	224
9.1.3	Măsura pe un spațiu produs . . . . .	225
9.2	Integrala pe un spațiu produs . . . . .	227